Az analysis és a geometria topologiai alapjairól.

(Magántanári próba-előadás, Szeged, 1921 december 15-én.)

KERÉKJÁRTÓ BÉLÁ-tól.

Jelen előadásomban az analysis és a geometria halmazelméleti és topologiai alapjaival fogok foglalkozni.

A halmazelmélet alanyaként bizonyos elemekből álló összesség, vagy halmaz szolgál s tárgyát képezi ily halmazok elemeinek egymásra való vonatkozásainál változatlan tulajdonságaik vizsgálata. Speciálisabb anyagot nyujt a rendezett halmazok vizsgálata, ahol is a halmaz bármely két egymástól különböző elemére fennáll egy transitiv természetü rendezési relatio. További specializálást jelent az elemek limes-elemeinek bevezetése, amelyre alapozva ily halmazok egymásra való kölcsönösen egyértelmü és folytonos vonatkozásait, vagy leképezéseit vizsgáljuk; az ilyen leképezéseknél változatlan tulajdonságok vizsgálata képezi a topologia tárgyát.

Az arithmetikai disciplinák alanyául szolgálnak első fokon a véges halmazok, melyeknek jellemzésére elegendő azon tulajdonságuk, hogy bármely elrendezésöknél van első elemök. A véges halmaz elemeiből alkotott symbolicus agglomerátumok bővitik ki a vizsgált halmazt egy megszámlálható végtelen halmazzá, vagyis amelynek elemeit kölcsönösen egyértelmü módon megfeleltethetjük a természetes számoknak. A megszámlálható halmazoknak két nevezetes rendezési typusa: a természetes számok nyujtotta ω rendtypus, (az ellenkező elrendezéssel nyert typust $^*\omega$-val jelöljük) s a rationális számok nyujtotta η rendtypus.

Az egész számok összeadását s kivonását egy $^*\omega+\omega$ rendtypusnak önmagára való, a rendezési relatiókat megtartó kölcsönösen egyértelmü leképezései jellemzik; ez önként adódik az ω rendtypus meghatározásából.

Vegyünk most egy η rendszámu halmazt; ennek jellemző tulajdonsága, hogy megszámlálható, nincsen első, sem utolsó eleme és hogy önmagában sűrű, azaz bármely két elem között van a halmaznak még egy további eleme. — Translationak nevezzük ennek önmagára való kölcsönösen egyértelmü, a rendezési relatiokat megtartó oly leképezését, mely eleget tesz az archimedesi axiomának, azaz ha a a halmaz egy tetszészerinti eleme, ennek képe b az a után következik és c egy tetszésszerinti, b után következő elem, akkor a leképezés véges számu ismétlése után a elem oly a' elembe megy át, mely c után következik. Egy ily translatio a rationális számok összeadásának felel meg; azaz meg lehet feleltetni a rationális számokat az adott halmaz elemeinek kölcsönösen egyértelmü s a rendezési relatiokat megtartó módon, ugyhogy bármely elemnek és képének megfelelő rationális számok különbsége ugyanaz a rationális szám.

Legyen adva egy η rendszámu halmaz translatioinak egy csoportja, vagyis olyan összessége, mely tartalmazza bármely translatioval együtt ennek inversét s bármely két translatioval együtt az ezek összetevéséből származó leképezést, mely tehát szintén translatio. — A csoportot n modulus szerint transitivnek nevezzük, ha a halmaz bármely két eleméhez, a-hoz és b-hez, van a csoportnak olyan translatioja, melynek n-dik hatványa, vagyis $n-1$-dik ismétlése a-t b-be viszi át. — Egy a 2 modulus szerint transitiv translatiocsoport tartalmazza alcsoportként a dyadicus számok összeadási csoportját. Egy minden primszámmodulus szerint, vagy teljesen transitiv translatiocsoport tartalmazza alcsoportként a rationális számok összeadási csoportját.

Egy translatiocsoportot az n modulus szerint commensurábilisnek nevezünk, ha van az adott halmaznak két oly fix eleme, a és b, hogy ha bármely más elem is c, az a-nak az a-t c-be átvivő translatio n^k hatványánál való képe egybeesik az a-nak az a-t b-be átvivő translatio valamelyik hatványánál való képével. — Egy 2 modulus szerint commensurábilis translatiocsoport a dyadicus számok összeadási csoportjának alcsoportja. Egy teljesen commensurábilis translatiocsoport a rationális számok összeadási csoportjának alcsoportja.

Látjuk, hogy a transitivitás, illetőleg a commensurabilitás a csoportra egy alsó, illetőleg felső korlátozás jellegével bir. Ezekből következik a dyadicus, illetőleg a rationális számok összeadási csoportjainak következő jellemzése:

Egy η rendtypusnak a 2 modulus szerint transitiv s commensurábilis translatiocsoportja azonos a dyadicus számok összeadási csoportjával. — Egy η rendtypusnak teljesen transitiv s commensurábilis translatiocsoportja azonos a rationális számok összeadási csoportjával.

Az összeadással teljesen analog módon tárgyalhatjuk az η rendtypus szorzásait s ezek csoportjait. — Az összeadási és szorzási csoportok összetevése az általános algebrai operátiok csoportját szolgáltatja.

E csoport tárgyalása eddig egy megadott η rendtypusu halmazra vonatkozik; maga után vonja azonban egyrészt az adott η rendtypusu halmaznak egy ujabb ily halmazzá, másrészt a vizsgált csoportnak velejáró bővitését. Ez eljárás a számoknak egy inconsistens, vagyis nem kész halmazának megismerésére vezet s fokozatosan az összes actuálisan ismert számok halmazának előállitására alkalmas.

Térjünk át most a lineáris continuum vizsgálatára. Az előbb vizsgált η rendtypusu halmazt egy uj halmazzá bővitjük ki azáltal, hogy a definiálandó halmaz elemének vesszük az eredeti halmaz oly egymásban foglalt intervallumsorozatát, mely az eredeti halmaz összes elemeit, vagy összes elemeit egy kivételével kihagyja. Az ilyenképen definiált halmazt nevezzük lineáris continuumnak. Hasonló módon vezetjük be a valós számok összeségét a rationális, vagy algebrai, vagy bármely más actuálisan ismert, tehát szükségképen megszámlálható és önmagában sűrű számhalmaz alapján. Mindkettőnek megvan a *Dedekind* értelmében való folytonossága, azaz bármely szeletalkotásnak megfelel egy e szeletalkotást definiáló elem.

A lineáris continuum folytonossága következtében egyszerübben tárgyalhatók a fent az η rendtypusra vonatkoztatott csoportok. Translationak nevezzük a lineáris continuum önmagára való kölcsönösen egyértelmü folytonos leképezését, melynél egy elem sem invariáns; folytonosságon értendő a leképezés azon tulajdonsága, hogy egy elemhez convergáló alapsorozatot a képelemhez convergáló alapsorozatba visz át. Egy ily translatio a valós számok egy összeadásával azonos. A translatioknak bármely csoportja azonos a valós számok egy összeadási csoportjával. A translatiok egy transitiv csoportja azonos a valós számok teljes összeadási csoportjával.

Ezekből az egytagu csoportokból felépithetők kéttagu csoportok, melyek még a reciprok leképezéssel tovább bővitve a projectiv csoportot definiálják. E kérdésnek ily alapon való tárgyalása megvan *Brouwer* vizsgálataiban s ezért is nem térek rá bővebben.

Térjünk át most a kétdimensiós halmazok tárgyalására. Sikon értjük a valós számokból alkotott számpárok, pontok összességét. Egyenes vonal, kör stb. nem egyebek, mint egyszerü első, illetőleg másodfoku egyenletnek eleget tevő számpárok halmaza. Egy pont környezetén értjük egy e pont köré irt kör belsejét. Tartománynak nevezünk egy olyan sikbeli ponthalmazt, melynek minden pontja belső pont, azaz bármely pontjával együtt e pont egy környezete is a halmazhoz tartozik s melynek bármely két pontja összeköthető egy, a halmazhoz tartozó út által.

A sík topologiájának alaptételei közül elsőnek emlitendő a *dimensioszám invariantiájá*-nak tétele, mely szerint nem lehet a sík pontjai s az egyenes vonal pontjai között egy kölcsönösen egyértelmű és folytonos vonatkozást létesiteni. Továbbá a *tartományjelleg megmaradásá*-nak tétele, mely szerint egy tartománynak kölcsönösen egyértelmű folytonos képe a síkon maga is egy tartomány. Végül a *Jordan-görbe tétel*, melynek értelmében egy körvonal kölcsönösen egyértelmű és folytonos, síkbeli képe a síkot két tartományra osztja s minden pontja e tartományok mindegyikének határpontja.

Tekintsük ezek után a sík geometriáját a *Hilbert* által adott megalapozásban. — A síkon két pont távolságának nevezzük a coordináta-különbségek négyzetösszegéből vont négyzetgyököt, euclidesi transformationak a sík olyan kölcsönösen egyértelmű folytonos, önmagára való leképezését, melynél bármely pontpár képe egy ugyanoly távolságu pontpár; euclidesi mértan az alakzatoknak az euclidesi transformatioknál változatlan tulajdonságainak vizsgálata. Analog módon értelmezzük az egységkör belsejében a *Bólyai—Lobatschefskij*-féle mértant; két pont távolságának nevezzük a rajtok áthaladó, az egységkörre merőleges körön mért körivekből alkotott kettősviszony logarithmusát; nem-euclidesi mozgásnak az egységkör belsejének minden olyan önmagára való kölcsönösen egyértelmű folytonos leképezését, melynél a nem-euclidesi távolság változatlan; a hyperbolicus mértan az e transformatioknál változatlan tulajdonságok vizsgálata. — *Hilbert* e geometriák qualitativ megalapozására egy axiomarendszert vezetett be, mely követeli: 1. hogy a megengedett leképezések csoportot képezzenek, 2. hogy egy valódi kör pontjai, vagyis mindazon pontok összesége, melyekbe egy tetszésszerinti pont a sík egy másik pontját változatlanul hagyó összes leképezéseknél átmegy, végtelen halmazt képezzenek, 3. hogy a leképezések egy zárt rendszert alkossanak. Ezekből az axiomákból bebizonyitja *Hilbert*, hogy a megfelelő geometria nem lehet más, mint a fent ismertetett euclidesi, vagy *Bólyai—Lobatschefskij*-féle geometria.

A sík topologiája alapot ad a felületek elméletének felépitéséhez. Síkháromszög kölcsönösen egyértelmű folytonos képét nevezzük háromszögnek; a felület háromszögeknek oly sorozata, hogy bármely háromszögnek mindegyik belső pontja csak egy háromszöghöz, mindegyik éle pontosan két háromszöghöz és mindegyik csúcsa véges számú cyclust alkotó háromszögekhez tartozik.

A felületek topologiáján, ezeknek egymásra való kölcsönösen egyértelmű folytonos leképezésein alapozódik a complex analyticus függvénytan topologicus, vagyis tisztán minőségi tárgyalása. — Ezt a problémát, a complex függvénytant a topologiából fogalmazni, azaz hosszuság és terület, általában metricus fogalmak nélkül megalapozni, *Brouwer* állitotta programmként 12 évvel ezelőtt tartott habilitátios előadásában; az azóta elmult időben sikerült néhány erre vonatkozó alapvető kérdést megoldani.

Tekintsük először az egységkör belsejének önmagára való kölcsönösen egyértelmű conformis leképezéseit. Egy ily leképezés mindenesetre topologicus (azaz kölcsönösen egyértelmű és folytonos), de nem megforditva; ugyanis egy topologicus leképezésnél lehetséges, hogy egy tartomány minden pontja önmagába megy át, anélkül, hogy a leképezés az egész körlemezen az azonosság volna; viszont conformis leképezésnél ez nem lehetséges. Hogy egy topologicus leképezés egy conformis leképezéssel legyen aequivalens, arra szükséges, de nem elégséges feltétel, hogy a transformationak, valamint minden nem azonos hatványának fixpontjai isoláltan feküdjenek. — Azon feltétel, hogy a transformationak egy véges számnál alacsonyabb hatványainál fellépő fixpontok halmaza a körlemezen mindenütt sűrű, az elégséges feltételt is adja, hogy e transformatio analyticusan kifejezhető legyen; ez esetben ugyanis a transformatio szakaszos, azaz egy bizonyos hatványa az azonos leképezést adja. Egy ilyen transformatio — ha még feltesszük, hogy megtartja a körlemez indicatrixát (irányitását) — a rotatio-tétel értelmében egy metricus forgatásnak kölcsönösen egyértelmű folytonos képe. — Más esetre még nem sikerült a körlemez conformis leképezésének topologicus jellemzése.

Hasonlóképen adódik a gömbfelület forgásainak jellemzése, mint a gömbfelületnek önmagára való egyértelmű folytonos, az indicatrixot megtartó, szakaszos leképezései. Továbbá a szabályos testek forgás-csoportjai, mint a gömbfelületnek az indicatrixot megtartó transformatioinak véges csoportjai.

Ezen eredményeim alapján bebizonyította *Brouwer*, hogy egy kétoldalu zárt felület önmagára való, az indicatrixot megtartó leképezéseinek véges csoportja aequivalens egy algebrai *Riemann*-féle felület önmagára való birationális transformatioinak csoportjával.

A sík egy translatiojának topologicus jellemzése még csak részben megoldott probléma. A síknak önmagára való topologicus, az indicatrixot megtartó, fixpont nélküli leképezése az egész sík felett egy translatio; ez *Brouwer translatio-tétele;* ez ugy értendő, hogy bármely pont köré meghatározható egy translatio-mező, azaz két végtelen vonaltól, melyek egyike képe a másiknak, határolt tartomány, melynek képe egy tőle teljesen különböző, egyik határvonalának másik oldalán fekvő ily tartomány. De jóllehet ily translatiomező construálható bármely pont köré, egy ily tartomány összes képei nem töltik ki szükségképen az egész síkot s igy a transformatio nem aequivalens egy közönséges translatioval. — Ha két különböző ilyen typusu leképezésből képezett csoportot tekintünk, melynek minden transformatioja ugyanily typusú, ez sem szükségképen azonos egy parallelogrammaticus translatiocsoporttal. — A translatiok jellemzésére valószinü módszernek tartom a folytonos csoportok által való jellemzést. Pontosabban fogalmazva, sejtésem a következő: a sík önmagára való topologicus, az indicatrixot megtartó leképzéseinek oly transitiv csoportja, melynek egyik nem azonos leképezésénél sincsen fixpont, azonos a complex számok összeadási csoportjával.

Ugyane módszerben, a folytonos csoportok alkalmazásában látom a conformis leképezés topologicus jellemzésére vezető utat s nem tartom lehetségesnek egyetlen ily leképezés önálló jellemzését.

Speciális függvények esetében a csoport vizsgálata is egyszerűsödik. A rationális függvények elméletében van néhány oly eredmény, mely remélhetővé teszi a reájok vonatkozó probléma teljes megoldását. — Az első feladat itten megállapitani a gömbfelület pontjainak olyan csoportokra osztását, mely alapjául szolgálhat egy rationális függvény argumentum elosztódásának. E problémát *Brouwer* oldotta meg a fentebb idézett rotatio-tétel segitségével, amennyiben kimutatta, hogy a gömbnek minden involutioja, azaz olyan szétosztása legfeljebb *n* pontból álló pontcsoportokra, hogy e pontcsoportok halmaza a gömbfelület topologicus képe, jellemezhető egy rationális függvény által oly értelemben, hogy két ugyanazon csoportba tartozó ponton e rationalis függvény egyenlő értékeket, különböző csoportokba tartozó pontokon különböző értékeket vesz fel. — Ehhez a tételhez kapcsolódóan állitom a következő, nehezebb természetű problémát: a rationális függvényt egyazon gömbfelületen jellemezni. E probléma természetének ismeretére fontos adatokat szolgáltatnak Gaston *Julia*-nak az utolsó három év folyamán közölt vizsgálatai a rationális függvények iteratioiról. Itten bizonyos attractios és repulsios pontok lépnek fel, melyekhez közelednek, illetve távolodnak egy pont iterált képei. A mi problémánk tárgyalásánál a kiindulási pontot épen az ezen vizsgálatok során felderült convergentia-tulajdonságok képezik. — Mint legegyszerübb esetet megemlitem a következő tételt a négyzetes függvény jellemzéséről: a síknak önmagára való kölcsönös (1, 2) értelmű folytonos leképezése, melynél két attractios pont és egy ezeket elválasztó *Jordan*-görbén mindenütt sűrű repulsios ponthalmaz van, azonos a $w=z^2$ függvénnyel.

Evvel a problémával teljesen analog az algebrai függvényeknek egyazon gömbfelületen való jellemzésének problémája. A célszerüségi szempont szükségessé teszi először is az algebrai függvények iteratioira vonatkozó, a *Julia* eredményeihez analog eredmények megállapitását. Erre vonatkozó eddigi eredményem, hogy az algebrai iteratioknál nyert képek általában az egész síkon mindenütt sűrűn feküsznek, — egy körülmény, mely megkönnyiti a megforditás lehetőségét s egyben a kivételes algebrai függvényeket, mint a singuláris *Riemann*-felületeknek megfelelő függvényeket adja. — E téren végleges eredmények még nincsenek.

Egy a tárgyalt eset után következő legegyszerübb eset az automorph függvényeké. Ami az argumentum elosztódását illeti, ismét *Brouwer* adta ennek jellemzését, az involutio-fogalom segitségével. Következnék a függvények értékelosztódásának hozzákapcsolódó problémája, mely megoldásra vár.

Mind e kérdés egységes megoldását adná az általános conformis leképezés topologicus jellemzése. Ilyen szempontból tekintve a kérdést, nem tünik lehetetlennek, sőt a tartalmához közeledünk annak, a göttingeni mathematikusok között évek óta emlegetett problémának, hogy a nagy *Picard*-tételt topologicusan fogalmazzuk és bizonyitsuk be, mint ahogy az egész függvénytan is quantitativból qualitativvá változnék át, ez ami egyes disciplinákra — elsősorban a projectiv geometriát emlitem — már eddig is megtörtént.

Sur les fondements topologiques de l'Analyse et de la Géométrie.

Leçon d'ouverture faite le 15 décembre 1921

par M. B. de Kerékjártó.

(Extrait de l'article précédent).

Je considère d'abord les transformations d'un type d'ordre linéaire, dénombrable et dense en soi. Une transformation biunivoque de cet ensemble en lui-même, conservant les relations d'ordre et satisfaisant à l'axiome d'Archimède, est appelée une translation. Un groupe parfaitement transitif et commensurable de telles translations est équivalent au groupe des additions des nombres rationnels. — J'envisage encore le groupe des multiplications et le groupe des opérations algébriques par rapport à un type d'ordre linéaire, dénombrable et dense en soi, et par rapport au continu linéaire. — Ensuite j'introduis les théorèmes fondamentaux de la topologie plane, savoir le théorème de M. *Jordan* et ses conséquences, et je fais connaître les fondements axiomatiques posés par M. *Hilbert* pour la géométrie plane. — Puis je passe à la topologie des surfaces et spécialement au problème de M. *Brouwer* qui demande de fonder la théorie des fonctions analytiques sur les notions de la topologie. Je considère d'abord les transformations topologiques (c'est-à-dire biunivoques et continues) du cercle en lui-même; il y a, en général, des conditions nécessaires mais non suffisantes pour qu'une telle transformation soit équivalente à une représentation conforme; mais, si la transformation est périodique, elle est nécessairement équivalente à une rotation ou à une symétrie, c'est-à-dire à une représentation conforme. Il y a des résultats analogues sur les transformations périodiques et les groupes finis de la sphère. Un théorème général de M. *Brouwer* dit qu'un groupe fini de transformations topologiques d'une surface bilatérale et fermée en elle-même, conservant l'indicatrice de la surface, est équivalent au groupe des transformations birationnelles d'une surface de *Riemann* algébrique en elle-même. — Le théorème de translation dû à *M. Brouwer* donne naissance à un problème concernant les groupes continus, consistant à caractériser le groupe des additions des nombres complexes comme groupe transitif de translations topologiques. — Il me semble que c'est l'application des groupes continus qui pourrait conduire à caractériser topologiquement la représentation conforme. Dans le cas des fonctions rationnelles, il y a quelques résultats remarquables qui sont en rapport avec le problème indiqué ; d'une part M. *Brouwer* a caractérisé la distribution des valeurs de la variable comme involutions topologiques de la sphère ; d'autre part les recherches de M. *Julia* sur les itérations des fonctions rationnelles ont abouti à des découvertes importantes. Sur les itérations des fonctions algébriques j'ai été conduit à quelques résultats analogues à ceux de M. *Julia.* Le problème de caractériser les groupes automorphes fut posé et résolu par M. *Brouwer;* il reste le probléme de caractériser les fonctions qui appartiennent à ces groupes. — Une solution générale de ces questions serait fournie, si on réussissait à caractériser topologiquement la représentation conforme ; de ce point de vue, il me semble probable qu'on pourra fonder et démontrer le théorème de M. *Picard* par la topologie.